2.4　三角関数の積分のまとめ

本節では、三角関数の乗数ごとの不定積分を紹介します。

●三角関数の1乗の不定積分

まずは、1乗の不定積分を示します。

$\int \sin x dx = -\cos x + C$	$\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + C$
$\int \cos x dx = \sin x + C$	$\int \frac{dx}{\cos x} = -\frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) + C$
$\int \tan x dx = -\log\lvert\cos x\rvert + C$	$\int \frac{dx}{\tan x} = \log\lvert\sin x\rvert + C$

これらの中で、$\sin^{-1}x$、$\cos^{-1}x$ の積分を下に示します。他の不定積分の計算はすでに示しました。

《基本例題2.4.1》($\sin^{-1}x$、$\cos^{-1}x$の不定積分)

次の不定積分を証明せよ。

(1)　$\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + C$　(2)　$\displaystyle\int \frac{dx}{\cos x} = -\frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) + C$

解題

$\sin^{-1}x$ の不定積分を得るには、置換積分・合成関数積分の手法を利用するか、半角公式を利用するか、2つの方法があります。

解法

(1)　まず、合成関数積分の手法を利用します。

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{\sin x}{(1-\cos x)(1+\cos x)}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1-\cos x} + \frac{1}{1+\cos x}\right)(-\cos x)'\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{(-\cos x)'}{1-\cos x}dx - \frac{1}{2}\int\frac{(\cos x)'}{1+\cos x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\log(1-\cos x) - \frac{1}{2}\log(1+\cos x) + C \quad (\because 1 \pm \cos x \geq 1)$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + C$$

次に、置換積分の手法を利用します。

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{\sin x}{1-\cos^2 x}dx \quad \begin{cases}\cos x \equiv t \\ -\sin x dx = dt\end{cases}$$

$$= \int \frac{-dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$= \frac{1}{2}[\log(t-1) - \log(t+1)] + C = \frac{1}{2}[\log(1-\cos x) - \log(1+\cos x)] + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + C$$

次は、半角公式の手法を利用した計算です。

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int\left(\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$t \equiv \tan\frac{x}{2},\quad d\left(\tan\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}$$

$$= \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dt}{t} = \log|t| + C = \log\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

$$\left[= \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right|^2 + C = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) + C\right]$$

末尾に示したように、不定積分にはさまざまな表現があります。

(2)　最初は合成関数積分の手法を利用した計算です。

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx = \frac{1}{2}\int\left(\frac{\cos x}{1-\sin x} + \frac{\cos x}{1+\sin x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}[-\log(1-\sin x) + \log(1+\sin x)] + C = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right) + C$$

$$= -\frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) + C$$

次に、置換積分の手法を利用します。

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}dx \quad \begin{cases}\sin x \equiv t \\ \cos x dx = dt\end{cases}$$

$$= \int \frac{dt}{1-t^2} = -\int \frac{dt}{t^2-1} = -\frac{1}{2}\int\left[\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\right]dt$$

$$= -\frac{1}{2}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = -\frac{1}{2}\log\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) + C \quad (\because 1 \pm \sin x \geq 0)$$

$$\left[=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)+C\right]$$

本問に、半角公式を適用しても、積分は簡単にはなりません。

●三角関数の2乗·3乗や積の積分

三角関数の２乗・３乗や積を積分するにも２つの考え方があります。

○ 2乗は半角公式、3乗は3倍角公式、積は積和公式を利用して「１乗化」します。

○ $f(\sin\theta)\cos\theta$や$f(\cos\theta)\sin\theta$の形に変形できるものは容易に積分できます。

これらのテクニックを次にまとめました。

２乗の１乗化	$\begin{cases}\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\\ \cos^2 x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\end{cases}$
３乗の１乗化	$\begin{cases}\cos^3 x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x\,(\because \cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x)\\ \sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x\,(\because \sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x)\end{cases}$
積和変換	$\begin{cases}\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x\\ \sin ax\cos bx=\frac{1}{2}[\sin(a+b)x+\sin(a-b)x]\\ \cos ax\cos bx=\frac{1}{2}[\cos(a+b)x+\cos(a-b)x]\\ \sin ax\sin bx=-\frac{1}{2}[\cos(a+b)x-\cos(a-b)x]\end{cases}$
三角関数の置換積分	$\begin{cases}\int f(\sin x)\cos x dx=\int f(t)dt \quad (t\equiv \sin x)\\ \int f(\cos x)\sin x dx=\int f(t)dt \quad (t\equiv \cos x)\\ \int f(\tan x)\frac{dx}{\cos^2 x}=\int f(t)dt \quad (t\equiv \tan x)\end{cases}$

《基本例題2.4.2》(三角関数の2乗の不定積分)

次の不定積分を証明せよ。

(1) $\int \sin^2 x dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C$　　(4) $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\tan x}+C$

(2) $\int \cos^2 x dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C$　　(5) $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+C$

(3) $\int \tan^2 x dx=\tan x-x+C$　　(6) $\int\frac{dx}{\tan^2 x}=-\frac{1}{\tan x}-x+C$

解題

$\sin^2 x$ や $\cos^2 x$ の不定積分には半角公式を利用しますが、他は置換積分か合成関数積分の手法を利用します。

解法

(1)(2) これらは半角公式を利用して1乗化して計算します。

$$\int \sin^2 x dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2x dx=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

$$\int \cos^2 x dx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2x dx=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

(3) これはなかなか面倒です。

$$\int \tan^2 x dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx$$

$$\therefore \int \tan^2 x dx=\tan x-x+C$$

(4)(5) いずれも$\tan\theta$をからめて計算します。

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x\tan^2 x}\quad \begin{cases}\tan x\equiv t\\ (\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{dt}{dx}\end{cases}$$

$$=\int\frac{1}{\cos^2 x}\frac{dx}{t^2}=\int\frac{dt}{t^2}=\int t^{-2}dt=-t^{-1}+C=-\frac{1}{\tan x}+C$$

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}dx$$

$$=\int\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'dx=\int(\tan x)'dx=\tan x+C$$

(6)　$\tan^2\theta$ と同様に計算します。

$$\int\frac{dx}{\tan^2 x}=\int\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx=\int\frac{dx}{\sin^2 x}-\int dx$$

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\tan x}+C$$

$$\therefore\int\frac{dx}{\tan^2 x}=-\frac{1}{\tan x}-x+C$$

《基本例題2.4.3》(三角関数の3乗の不定積分)

次の不定積分を証明せよ。

(1) $\displaystyle\int\sin^3 x dx=\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+C$

(2) $\displaystyle\int\cos^3 x dx=-\frac{\sin^3 x}{3}-\sin x+C$

(3) $\displaystyle\int\tan^3 x dx=\log\left|\sin x\right|+\frac{1}{2\cos^2 x}+C$

(4) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin^3 x}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)+\frac{1}{4}\log\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)+C$

(5) $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)-\frac{1}{4}\log\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)+C$

(6) $\displaystyle\int\frac{dx}{\tan^3 x}=-\frac{1}{2\sin^2 x}-\log\left|\sin x\right|+C$

解題

三角関数の３乗の不定積分は、置換積分を利用するか、３倍角の公式を利用して１乗化してから積分します。

解法

(1)　$\sin^3 x$は置換積分を利用して積分します。

$$I=\int\sin^3 x dx=\int\left(1-\cos^2 x\right)\sin x dx=\int\left(t^2-1\right)dt\quad\begin{cases}\cos x\equiv t\\ -\sin x dx=dt\end{cases}$$

$$=\frac{t^3}{3}-t+C=\frac{\cos^3 x}{3}-\cos x+C$$

３倍角の公式を利用しても積分できます。

$$\sin 3x=3\sin x-4\sin^3 x\Rightarrow\sin^3 x=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x$$

$$\Rightarrow I=\frac{3}{4}\int\sin x dx-\frac{1}{4}\int\sin 3x dx=-\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{12}\cos 3x+C$$

(2)　$\cos^3 x$は置換積分を利用して積分します。

$$I=\int\cos^3 x dx=\int\left(1-\sin^2 x\right)\cos x dx=-\int\left(t^2-1\right)dt\quad\begin{cases}\sin x\equiv t\\ \cos x dx=dt\end{cases}$$

$$=-\frac{t^3}{3}+t+C=-\frac{\sin^3 x}{3}-\sin x+C$$

３倍角の公式を利用しても積分できます。

$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x\Rightarrow\cos^3 x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x$$

$$\Rightarrow I=\frac{3}{4}\int\cos x dx+\frac{1}{4}\int\cos 3x dx=-\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{12}\sin 3xC$$

(3)　$\tan^3 x$は置換積分を利用して積分します。

$$I=\int\tan^3 x dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x}\sin x dx=\int\frac{t^2-1}{t^3}dt\quad\begin{cases}\cos x\equiv t\\ -\sin x dx=dt\end{cases}$$

$$=\int\left(\frac{1}{t}-t^{-3}\right)dt=\log\left|t\right|+\frac{1}{2}t^{-2}+C=\log\left|\sin x\right|+\frac{1}{2\cos^2 x}+C$$

(4)　$\sin^{-3}x$は置換積分を利用して積分します。

$$I=\int\frac{dx}{\sin^3 x}=\int\frac{\sin x dx}{\left(1-\cos^2 x\right)^2}\quad\begin{cases}\cos x\equiv t\\ -\sin x dx=dt\end{cases}$$

$$=\int\frac{-dt}{\left(1-t^2\right)^2}=-\int\left[\frac{1}{(t+1)(t-1)}\right]^2 dt=-\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right]^2 dt\equiv-\frac{1}{4}I_2$$

$$I_2=\int\left[\left(\frac{1}{t-1}\right)^2-\frac{2}{(t+1)(t-1)}+\left(\frac{1}{t+1}\right)^2\right]dt=\int\left[(t-1)^{-2}+(t+1)^{-2}-\left(\frac{1}{t-1}-\frac{}{t}\right.\right.$$

$$=-(t-1)^{-1}-(t+1)^{-1}-\log\left|t-1\right|+\log\left|t+1\right|+C$$

$$=-\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}\right)-\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=-\left(\frac{2t}{t^2-1}\right)-\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$\therefore I=-\frac{1}{4}\left[-\left(\frac{2t}{t^2-1}\right)-\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C\right]\equiv\frac{1}{4}\left(\frac{2t}{t^2-1}\right)+\frac{1}{4}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{2\cos x}{\cos^2 x-1}\right)+\frac{1}{4}\log\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C=-\frac{1}{2}\left(\frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)+\frac{1}{4}\log\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)+C$$

(5) $\cos^{-3}x$は置換積分を利用して積分します。

$$I=\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\int\frac{\cos x dx}{\left(1-\sin^2 x\right)^2}\quad\begin{cases}\sin x\equiv t\\ \cos x dx=dt\end{cases}$$

$$=\int\frac{dt}{\left(1-t^2\right)^2}=\int\left[\frac{1}{(t+1)(t-1)}\right]^2 dt=\frac{1}{4}\int\left[\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right]^2 dt\equiv\frac{1}{4}I_2$$

$$I_2=\int\left[\left(\frac{1}{t-1}\right)^2-\frac{2}{(t+1)(t-1)}+\left(\frac{1}{t+1}\right)^2\right]dt=-\left(\frac{2t}{t^2-1}\right)-\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$\therefore\int\frac{dx}{\cos^3 x}=\frac{1}{4}\left[-\left(\frac{2t}{t^2-1}\right)-\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C\right]\equiv-\frac{1}{4}\left(\frac{2t}{t^2-1}\right)-\frac{1}{4}\log\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{2\sin x}{\sin^2 x-1}\right)-\frac{1}{4}\log\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C=\frac{1}{2}\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)-\frac{1}{4}\log\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)+C$$

(6) $\tan^{-3}x$は置換積分を利用して積分します。

$$I=\int\frac{dx}{\tan^3 x}=\int\frac{\cos^3 x}{\sin^3 x}dx=\int\frac{1-\sin^2 x}{\sin^3 x}\cos x dx\quad\begin{cases}\sin x\equiv t\\ \cos x dx=dt\end{cases}$$

$$=\int\frac{1-t^2}{t^3}dt=\int\left(t^{-3}-\frac{1}{t}\right)dt=-\frac{1}{2}t^{-2}-\log|x|+C$$

$$=-\frac{1}{2\sin^2 x}-\log|\sin x|+C$$

《基本例題2.4.4》（三角関数の積の不定積分）

次の不定積分を求めよ

(1) $\int\sin 2x\cos x dx$　　(2) $\int\cos 3x\cos x dx$

解題

三角関数の積の不定積分は、左頁に示した積和変換公式を利用して1乗の三角関数の和や差に変形してから積分します。

解法

(1) $\sin x$と$\cos x$の積は2つのsin関数の和に変形してから積分します。

$$\int\sin 2x\cos x dx=\int\frac{1}{2}[\sin 3x+\sin x]dx=\frac{1}{2}\int\sin 3x dx+\frac{1}{2}\int\sin x dx$$

$$=-\frac{1}{6}\cos 3x-\frac{1}{2}\cos x+C$$

(2) $\cos x$の積は2つのcos関数の和に変形してから積分します。

$$\int\cos 3x\cos x dx=\int\frac{1}{2}[\cos 4x+\cos 2x]dx=\frac{1}{2}\int\cos 4x dx+\frac{1}{2}\int\cos 2x dx$$

$$=\frac{1}{8}\sin 4x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

●三角関数の4乗の積分

4乗以上の積分は、半角公式の繰り返しや置換積分を利用します。次項のウォリスの積分公式も役に立ちます。

《基本例題2.4.5》（三角関数の4乗の不定積分）

次の不定積分を証明せよ。

(1) $\int\sin^4 x dx=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$

(2) $\int\cos^4 x dx=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$

(3) $\int\tan^4 x dx=\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C$

(4) $\int\frac{dx}{\sin^4 x}=-\frac{1}{3\tan^3 x}-\frac{1}{\tan x}+C$

(5) $\int\frac{dx}{\cos^4 x}=\frac{1}{3}\tan^3 x+\tan x+C$

(6) $\int\frac{dx}{\tan^4 x}=-\frac{1}{3\tan^3 x}+\frac{1}{\tan x}+x+C$

解題

三角関数の4乗の不定積分は、半角公式を繰り返して利用するか、置換積分を利用します。

解法

(1) $\sin^4 x$は半角公式を繰り返し利用して積分します。

$$\int\sin^4 x dx=\int\left[\frac{1-\cos 2x}{2}\right]^2 dx=\frac{1}{4}\left[\int dx-2\int\cos 2x dx+\int\cos^2 2x dx\right]$$

$$=\frac{1}{4}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2x dx+\frac{1}{4}\int\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{3}{8}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2xdx+\frac{1}{8}\int\cos 4xdx$$
$$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$$

(2)　$\cos^4 x$も半角公式を繰り返し利用して積分します。

$$\int\cos^4 xdx=\int\left[\frac{1+\cos 2x}{2}\right]^2 dx=\frac{1}{4}\left[\int dx+2\int\cos 2xdx+\int\cos^2 2xdx\right]$$
$$=\frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2xdx+\frac{1}{4}\int\left(\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx$$
$$=\frac{3}{8}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2xdx+\frac{1}{8}\int\cos 4xdx$$
$$=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$$

(3)　$\tan^4 x$は$\cos^{-2n}x$の積分に帰着して計算します。

$$\int\tan^4 xdx=\int\frac{\sin^4 x}{\cos^4 x}dx=\int\frac{\left(1-\cos^2 x\right)^2}{\cos^4 x}dx$$
$$=\int\frac{dx}{\cos^4 x}-2\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int dx$$
$$=\left(\tan x+\frac{1}{3}\tan^3 x\right)-2(\tan x)+x+C=\frac{1}{3}\tan^3 x-\tan x+x+C$$

(4)　$\sin^{-4}x$は置換積分します（他にも方法はあります）。

$$\int\frac{dx}{\sin^4 x}=\int\frac{dx}{\cos^4 x\tan^4 x}=\int\frac{1}{\cos^2 x\tan^4 x}\frac{dx}{\cos^2 x}\qquad\left\{\begin{array}{l}\tan x\equiv t\\ \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow\dfrac{dt}{dx}\end{array}\right.$$
$$=\int\frac{1+\tan^2 x}{\tan^4 x}\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\frac{1+t^2}{t^4}dt=\int\left(t^{-4}+t^{-2}\right)dt=-\frac{1}{3}t^{-3}-t^{-1}+C$$
$$=-\frac{1}{3\tan^3 x}-\frac{1}{\tan x}+C$$

(5)　$\cos^{-4}x$も置換積分します（他にも方法はあります）。

$$\int\frac{dx}{\cos^4 x}=\int\frac{1}{\cos^2 x}\frac{dx}{\cos^2 x}=\int\left(1+\tan^2 x\right)\frac{dx}{\cos^2 x}\qquad\left\{\begin{array}{l}\tan x\equiv t\\ \left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}\Rightarrow\dfrac{dt}{dx}\end{array}\right.$$
$$=\int\left(1+t^2\right)dt=t+\frac{1}{3}t^3+C=\frac{1}{3}\tan^3 x+\tan x+C$$

(5)　$\tan^{-4}x$は$\sin^{-2n}x$の積分に帰着して計算します。

$$\int\frac{dx}{\tan^4 x}=\int\frac{\cos^4 x}{\sin^4 x}dx=\int\frac{\left(1-\sin^2 x\right)^2}{\sin^4 x}dx=\int\frac{dx}{\sin^4 x}-2\int\frac{dx}{\sin^2 x}+\int dx$$
$$=\left(-\frac{1}{3\tan^3 x}-\frac{1}{\tan x}\right)-2\left(-\frac{1}{\tan x}\right)+x+C=-\frac{1}{3\tan^3 x}+\frac{1}{\tan x}+x+C$$

●三角関数と指数関数の積の積分

三角関数と指数関数の積は、微分しても積分しても、いずれも三角関数と指数関数の積になります。こういうのを「閉じている集合」といいます。

《基本例題2.4.6》（三角関数と指数関数の積の不定積分）

$$\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int e^x\sin xdx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)\\ \displaystyle\int e^x\cos xdx=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)\end{array}\right.\qquad\left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int e^{-x}\sin xdx=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)\\ \displaystyle\int e^{-x}\cos xdx=\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)\end{array}\right.$$

解題

$e^x\sin x$と$e^x\cos x$は、微分しても積分しても$e^x\sin x$と$e^x\cos x$の一次結合になります。こういう場合は部分積分してもいいのですが、微分したものから一次結合を作るという方法もあります。

解法

(1)　$e^x\sin x$は部分積分して計算できますが、

$$Is=\int e^x\sin xdx=-\int e^x(\cos x)'dx=-\left[e^x(\cos x)-\int e^x(\cos x)dx\right]$$
$$Ic=\int e^x\cos xdx=\int e^x(\sin x)'dx=e^x(\sin x)-\int e^x(\sin x)dx$$
$$\therefore\left\{\begin{array}{l}Is=-e^x\cos x+Ic\\ Ic=e^x\sin x-Is\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}Is-Ic=-e^x\cos x\\ Is+Ic=e^x\sin x\end{array}\right.$$
$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\displaystyle Is=\int e^x\sin xdx=\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)\\ \displaystyle Ic=\int e^x\cos xdx=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)\end{array}\right.$$

微分した結果を組み合わせても計算できます。

$$\begin{cases}\left(e^x\sin x\right)' = e^x\sin x + e^x\cos x \\ \left(e^x\cos x\right)' = e^x\cos x - e^x\sin x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left(e^x\sin x + e^x\cos x\right)' = 2e^x\cos x \\ \left(e^x\sin x - e^x\cos x\right)' = 2e^x\sin x\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\displaystyle\int e^x\sin x dx = \frac{1}{2}e^x\left(\sin x - \cos x\right) \\ \displaystyle\int e^x\cos x dx = \frac{1}{2}e^x\left(\sin x + \cos x\right)\end{cases}$$

(2) $e^x\sin x$は部分積分して計算できますが、

$$Is = \int e^{-x}\sin x dx = -\int e^{-x}\left(\cos x\right)' dx = -\left[e^{-x}\left(\cos x\right) + \int e^{-x}\left(\cos x\right)dx\right]$$

$$Ic = \int e^{-x}\cos x dx = \int e^{-x}\left(\sin x\right)' dx = e^{-x}\left(\sin x\right) + \int e^{-x}\left(\sin x\right)dx$$

$$\therefore \begin{cases}Is = -e^{-x}\cos x - Ic \\ Ic = e^{-x}\sin x + Is\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}Is + Ic = -e^{-x}\cos x \\ Is - Ic = -e^{-x}\sin x\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\displaystyle Is = \int e^{-x}\sin x dx = -\frac{1}{2}e^{-x}\left(\sin x - \cos x\right) \\ \displaystyle Ic = \int e^{-x}\cos x dx = \frac{1}{2}e^{-x}\left(\sin x - \cos x\right)\end{cases}$$

微分した結果を組み合わせても計算できます。

$$\begin{cases}\left(e^{-x}\sin x\right)' = -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x \\ \left(e^{-x}\cos x\right)' = -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left(e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x\right)' = -2e^{-x}\sin x \\ \left(e^{-x}\sin x - e^{-x}\cos x\right)' = 2e^{-x}\cos x\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\displaystyle\int e^{-x}\sin x dx = -\frac{1}{2}e^{-x}\left(\sin x - \cos x\right) \\ \displaystyle\int e^{-x}\cos x dx = \frac{1}{2}e^{-x}\left(\sin x + \cos x\right)\end{cases}$$