漸化式

●漸化式と桁数の問題（2014年京大文系） [B/A/B]

次の式

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=2a_n-1\quad (n=1,2.3,\cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　次の不等式

$$a_n{}^2-2a_n>10^{15}$$

を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし、$0.3010<\log_{10}2<0.3011$ であることは用いてよい。

（2014 年京大文系 4）

解題

(1) は特性方程式型の極めてやさしい漸化式の問題、(2) は対数不等式のやさしい問題です。

解法

(1)　特性方程式型の漸化式を解いて一般項を求めます。

$$\begin{cases} a_1=2 \\ a_{n+1}=2a_n-1 \end{cases}$$

$$\alpha=2\alpha-1\Rightarrow\alpha=1$$

$$a_{n+1}-1=2(a_n-1)$$

$$a_n-1=2(a_{n-1}-1)=2^{n-1}(a_1-1)=2^{n-1}$$

$$\therefore a_n=2^{n-1}+1,\quad a_1=2$$

(2)　対数不等式を解きます。

$$a_n{}^2-2a_n=a_n(a_n-2)=(2^{n-1}+1)(2^{n-1}-1)=2^{2(n-1)}-1>10^{15}$$

$$2^{2(n-1)}>2^{2(n-1)}-1>10^{15}$$

$$2(n-1)\log_{10}2>15\Rightarrow n-1>\frac{15}{2\log_{10}2}$$

$$0.3010<\log_{10}2<0.3011$$

$$24.91<\frac{15}{2\log_{10}2}<24.92<n-1\Rightarrow n=26$$

$2^{2(n-1)}=4^{n-1}=4$、16、64、…であるため、2^{50}の1の位は4または6であり、これらから1を差し引いても1の位以外は変化しません。したがって、$a_{26}{}^2-2a_{26}>10^{15}$が成立し、$n=26$が最小の自然数です。

●誘導のない3項間漸化式の問題（2012年慶應大／医） [B/A/B]

$a_1=1$、$a_2=4$、$a_{n+2}=-a_{n+1}+2a_n$ （$n=1,2,3,\cdots$）によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

（2012 年慶応大／医 11、改題）

解題

誘導なしの３項間漸化式の小問です。難関大では、３項間漸化式の問題に誘導は期待できないということです。

解法1 １つの数列で解く

特性方程式を解いて、特性解を２つ見つけます。

$$\begin{cases} a_1=1 \\ a_2=4 \end{cases} a_{n+2}=-a_{n+1}+2a_n$$

$$\alpha^2+\alpha-2=(\alpha-1)(\alpha+2)=0 \Rightarrow \alpha=1,-2$$

$$a_{n+2}-a_{n+1}=-2(a_{n+1}-a_n)$$

２つの特性解から１つの等比数列をつくって一般項を計算します。

$$a_{n+1}-a_n=-2(a_n-a_{n-1})=(-2)^{n-1}(a_2-a_1)=3(-2)^{n-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)=a_n-a_1=\sum_{k=1}^{n-1}3(-2)^{k-1}=3\sum_{k=1}^{n-1}(-2)^{k-1}=3\frac{1-(-2)^{n-1}}{1-(-2)}=1-(-2)^{n-}$$

$$\therefore a_n=a_1+1-(-2)^{n-1}=2-(-2)^{n-1}$$

解法2 ２つの数列で解く

２つの数列をつくって、その加減で元の数列を求める方法もあります。

$$a_{n+2}-a_{n+1}=-2(a_{n+1}-a_n) \Rightarrow a_{n+1}-a_n=3(-2)^{n-1}$$

$$a_{n+2}+2a_{n+1}=a_{n+1}+2a_n=\cdots=a_2+2a_1=6$$

$$\begin{cases} a_{n+1}+2a_n=6 \\ a_{n+1}-a_n=3(-2)^{n-1} \end{cases} \Rightarrow 3a_n=6-3(-2)^{n-1} \Rightarrow a_n=2-(-2)^{n-1}$$

●特性値では解けない3項間漸化式の問題（2016年一橋大） [B/A/B]

θを実数とし，数列$\{a_n\}$を

$$a_1=1、a_2=\cos\theta、a_{n+2}=\frac{3}{2}a_{n+1}-a_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

により定める。すべてのnについて$a_n=\cos(n-1)\theta$が成り立つとき、$\cos\theta$を求めよ。

（2016年一橋大2）

解題

漸化式問題の冒頭に、特性値では解けない、変わった3項間漸化式の問題を2題紹介します。

まずは3項間漸化式の特性値を求めて2項間漸化式に持ち込もうとするでしょうが、特性方程式の解が実数解にならないので、これはうまくいきません。特性値を求めてうまくいくのは、その数列が1つの値に収束する場合のみです。一般項を漸化式に代入すると、$\cos\theta$が満たすべき関係式が得られます。

解法

一般項を漸化式に代入します。

$$\begin{cases} a_{n+2}=\dfrac{3}{2}a_{n+1}-a_n \\ a_n=\cos(n-1)\theta \end{cases} \Rightarrow \cos(n+1)\theta=\frac{3}{2}\cos n\theta-\cos(n-1)\theta$$

$$\Rightarrow \cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta=\frac{3}{2}\cos n\theta$$

$$\cos(n\pm1)\theta=\cos n\theta\cos\theta\mp\sin n\theta\sin\theta$$

$$\Rightarrow \cos(n+1)\theta+\cos(n-1)\theta=2\cos n\theta\cos\theta=\frac{3}{2}\cos n\theta$$

$$\Rightarrow \cos n\theta\left(2\cos\theta-\frac{3}{2}\right)=0\Rightarrow\begin{cases}\cos n\theta=0 \\ 2\cos\theta-\dfrac{3}{2}=0\Rightarrow\cos\theta=\dfrac{3}{4}\end{cases}$$

$\cos n\theta=0$のときは$a_1=0$になりますがこれは条件$a_1=1$と矛盾するので$\cos n\theta\neq0$、したがって$\cos\theta=3/4$です。

●3項間分数漸化式の問題（2017年昭和大／医） [B/A/B]

次のように数列 a_n を定める。

$$\begin{cases} a_1 = 2016 \\ a_2 = 2017 \end{cases} \quad a_{n+2} = \frac{1+a_{n+1}}{a_n} \ (n = 1, 2, \cdots)$$

次の問いに答えよ。

(1) a_5 を求めよ。

(2) a_{2017} を求めよ。

（2017 年昭和大／医 131、改題）

解題

3 項間分数型漸化式の解法は、ないこともないのですが、この小問レベルではあまりに過大であり、何か他の方法を考えます。この種の問題はサイクリックになっていることが多いので、まず (1) を計算するのですが、数字が大きすぎるので、差分に注目し、a_1=2016 ≡α、a_2=α +1 とおくと、計算が楽です。

解法

(1) a_5を求めます。

$$a_3 = \frac{1+a_2}{a_1} = \frac{\alpha+2}{\alpha}、\ a_4 = \frac{1+a_3}{a_2} = \frac{1+\dfrac{\alpha+2}{\alpha}}{\alpha+1} = \frac{2(\alpha+1)}{\alpha(\alpha+1)} = \frac{2}{\alpha}$$

$$a_5 = \frac{1+a_4}{a_3} = \frac{1+\dfrac{2}{\alpha}}{\dfrac{\alpha+2}{\alpha}} = 1$$

こう簡単になるとサイクリック確定です。

(2) a_6を求めるとa_1に戻るので法則がわかります。

$$a_6 = \frac{1+a_5}{a_4} = \frac{1+1}{\dfrac{2}{\alpha}} = \alpha = a_1 \Rightarrow a_{1+5n} = a_1$$

これで元に戻ったので、周期5で繰り返されています。このnを求めて「いくつずれているか」を調べます。次の計算で、1つずれていることがわかり、a_{2017}がわかります。

$$1+5n = 2017 \Rightarrow n = \frac{2016}{5} \Rightarrow \frac{2015}{5} = 403$$

$$\therefore 2017 = (5\cdot 403+1)+1 \Rightarrow a_{2017} = a_2 = 2017$$

●一般形の2項間分数漸化式の問題(2008年東北大後期)　[B/B/B]

> 数列 $\{a_n\}$ を
>
> $$a_1=2,\quad a_{n+1}=\frac{4a_n+1}{2a_n+3}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$
>
> で定める。このとき、以下の問いに答えよ。
>
> (1) 2つの実数 α と β に対して、
>
> $$b_n=\frac{a_n+\beta}{a_n+\alpha}\quad (n=1,2,3,\cdots)$$
>
> とおく。$\{b_n\}$ が等比数列となるような α と β $(\alpha>\beta)$ を 1 組求めよ。
>
> (2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。
>
> (2008 年東北大後期 4)

解題

入試数学のテクニックとして、隣接2項間の分数漸化式の数パターンの解法がありますが、本問はその中でもっとも難しいパターンを、等比数列への帰着の誘導を付けて出題したものです。難関大の場合には、誘導なしでも解けるようにしておく必要があるでしょう。そのためには本問は参考になります。

解法

(1)　$\{bn\}$が等比数列になるためには次の条件が必要です。

$$b_n=\frac{a_n+\beta}{a_n+\alpha}\equiv Rb_{n-1}=R\frac{a_{n-1}+\beta}{a_{n-1}+\alpha}$$

この関係式に冒頭の漸化式を代入し、成立するためのR、α、βに関する条件を求めて、α、βを求めます。

$$\Rightarrow b_n=\frac{\dfrac{4a_{n-1}+1}{2a_{n-1}+3}+\beta}{\dfrac{4a_{n-1}+1}{2a_{n-1}+3}+\alpha}=\frac{4a_{n-1}+1+\beta(2a_{n-1}+3)}{4a_{n-1}+1+\alpha(2a_{n-1}+3)}$$

$$=\frac{(4+2\beta)a_{n-1}+1+3\beta}{(4+2\alpha)a_{n-1}+1+3\alpha}=\frac{4+2\beta}{4+2\alpha}\frac{a_{n-1}+\dfrac{1+3\beta}{4+2\beta}}{a_{n-1}+\dfrac{1+3\alpha}{4+2\alpha}}\Rightarrow\begin{cases}R=\dfrac{4+2\beta}{4+2\alpha}\\ \dfrac{1+3\beta}{4+2\beta}=\beta\\ \dfrac{1+3\alpha}{4+2\alpha}=\alpha\end{cases}$$

$$\therefore x=\frac{1+3x}{4+2x}\Rightarrow x(4+2x)-(1+3x)=2x^2+x-1=0$$

$$(2x-1)(x+1)=0\Rightarrow x=-1,\frac{1}{2},\quad \alpha>\beta\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2},\beta=-1$$

(2)　(1)で求めたα、βを使ってRを求めて、b_nとa_nを求めます。

$$R=\frac{4+2\beta}{4+2\alpha}=\frac{4-2}{4+1}=\frac{2}{5}\Rightarrow b_n=\frac{2}{5}b_{n-1}=\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}b_1$$

$$b_1=\frac{a_1+\beta}{a_1+\alpha}=\frac{2-1}{2+\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}\Rightarrow b_n=\left(\frac{2}{5}\right)^n$$

$$b_n=\frac{a_n+\beta}{a_n+\alpha}\Rightarrow b_n\left(a_n+\alpha\right)-\left(a_n+\beta\right)=\left(b_n-1\right)a_n+\left(\alpha b_n-\beta\right)=0$$

$$a_n=\frac{\alpha b_n-\beta}{1-b_n}=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n+1}{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}=\frac{2^{n-1}+5^n}{5^n-2^n}$$

●nを含む逆数型漸化式を未定係数法で解く問題（2019年横浜市大／医12）　[C/C/B]

漸化式

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2na_n+3},\quad a_1=1$$

で定められる数列 a_n の一般項を n の式で表しなさい。ただし、n は 1 以上の自然数とします。

（2019 年横浜市大／医 12）

解題

逆数型であって n を含む多項式型でもある、未定係数法を利用する漸化式問題です。同学は 2016 年にも未定係数法を利用する三項間漸化式問題が出題されています。漸化式問題で未定係数法が一般的になりつつあるのかもしれません。

解法

まず逆数をとって置き換えます。

$$a_{n+1}=\frac{a_n}{2na_n+3}\Leftrightarrow\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2na_n+3}{a_n}=2n+\frac{3}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_n}\equiv b_n\Rightarrow b_{n+1}=2n+3b_n$$

これは特性方程式型の漸化式に n が加わった多項式型であって、$2n$ がなければそのまま等比数列に帰着できますがこのままではそうはいきません。等比数列になるように、n を含んだ一般項を考える、係数を未定にして新しい数列をつくる、これが「未定係数法」です。

$$c_n\equiv b_n+\alpha n+\beta\Rightarrow\begin{cases}c_{n+1}=3c_n\\ b_{n+1}=2n+3b_n\end{cases}$$

$$b_{n+1}+\alpha(n+1)+\beta=3(b_n+\alpha n+\beta)=2n+3b_n+\alpha(n+1)+\beta$$

$$\Rightarrow 3(\alpha n+\beta)=2n+\alpha(n+1)+\beta$$

この関係が成立するように n の係数 α と定数 β を定めればよい訳です。

$$\Rightarrow\begin{cases}3\alpha=2+\alpha\Rightarrow\alpha=1\\ 3\beta=\alpha+\beta\Rightarrow 2\beta=\alpha=1\Rightarrow\beta=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c_n\equiv b_n+n+\dfrac{1}{2}\\ c_{n+1}=3c_n\end{cases}$$

$$\Rightarrow c_n=3c_{n-1}=\cdots=3^{n-1}c_1$$

$$c_1=b_1+1+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\Rightarrow c_n=\frac{5}{2}\cdot 3^{n-1}$$

$$\Rightarrow b_n = c_n - \left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}\cdot 3^{n-1} - \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{1}{\frac{5}{2}\cdot 3^{n-1} - \left(n + \frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{5\cdot 3^{n-1} - 2n - 1}$$

●多項式型の3項間漸化式の問題（2016年横浜市大／医）　[C/C/C]

n を自然数とする。漸化式

$$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n-6n=0$$
$$a_1=1,\ a_2=1$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

（2016 年横浜市大／医 13）

解題

ついに出たかという「多項式型の３項間漸化式」の問題です。参考書などでは見たことがありますが、極めて珍しいでしょう。2014 年大阪府大／環境４でも出題されています。漸化式問題としては難問の類でしょう。

もっとも素直な方法は、２項ずつ組み合わせて、n を差分を取って消去しようとする方法です。別解に示す「未定係数法」に慣れていなければ、迷いなくこの方法で行くべきでしょう。

「未定係数法」にも慣れておく必要があります。漸化式に n があれば $pn+q$、$n2$ があれば $pn2+qn+r$ を末尾に付けて、つじつまが合うように係数を決めて解いていきます。この場合、「$6n$」がないものとして三項間漸化式の特性方程式を解いておくと、計算が楽になります。特性値が２つ得られ、２種類の置き換えでそれぞれ二項間漸化式が得られます。これらを両方解いて差を取ると、一般項が得られます。。

解法1

(1)　階差を1回取るとnが消え、2回取ると定数が消えて、特性方程式型になり、2つの関係式が得られます。

$$\begin{cases} a_{n+3}-5a_{n+2}+6a_{n+1}-6(n+1)=0 \\ a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n-6n=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow (a_{n+3}-a_{n+2})-5(a_{n+2}-a_{n+1})+6(a_{n+1}-a_n)-6=0$$
$$a_{n+1}-a_n\equiv b_n \Rightarrow b_{n+2}-5b_{n+1}+6b_n-6=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} b_{n+3}-5b_{n+2}+6b_{n+1}-6=0 \\ b_{n+2}-5b_{n+1}+6b_n-6=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow (b_{n+3}-b_{n+2})-5(b_{n+2}-b_{n+1})+6(b_{n+1}-b_n)=0$$
$$b_{n+1}-b_n\equiv c_n \Rightarrow c_{n+2}-5c_{n+1}+6c_n=0$$
$$\alpha^2-5\alpha+6=(\alpha-2)(\alpha-3)=0\Rightarrow \alpha=2,3$$
$$\Rightarrow \begin{cases} c_{n+1}-2c_n=3(c_n-2c_{n-1})=3^2(c_{n-1}-2c_{n-2})=\cdots=3^{n-1}(c_2-2c_1) \\ c_{n+1}-3c_n=2(c_n-3c_{n-1})=2^2(c_{n-1}-3c_{n-2})=\cdots=2^{n-1}(c_2-3c_1) \end{cases}$$

(2)　これら2つの漸化式の差を取るとc_nが容易に得られるので、各数列の初期値を計算します。

$$\begin{cases} c_1 = b_2 - b_1 \\ c_2 = b_3 - b_2 \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = a_2 - a_1 = 0 \\ b_2 = a_3 - a_2 = a_3 - 1 \\ b_3 = a_4 - a_3 \end{cases} \quad \begin{cases} a_1 = 1,\ a_2 = 1 \\ a_3 - 5a_2 + 6a_1 - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_3 = 5\cdot 1 - 6\cdot 1 + 6 = 5$$

$$a_4 - 5a_3 + 6a_2 - 6\cdot 2 = 0$$

$$a_4 = 5\cdot 5 - 6\cdot 1 + 12 = 31$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = 5 - 1 = 4 \\ b_3 = 31 - 5 = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = b_2 - b_1 = 4 \\ c_2 = b_3 - b_2 = 22 \end{cases}$$

これでc_nが得られ、続いてb_n、a_nが得られます。ここの計算は、面倒ですが、力技で解けます。この種の計算は難なくこなせるよう、習熟が絶対必要です。

$$\Rightarrow \begin{cases} c_{n+1} - 2c_n = 3^{n-1}(c_2 - 2c_1) = 14\cdot 3^{n-1} \\ c_{n+1} - 3c_n = 2^{n-1}(c_2 - 3c_1) = 10\cdot 2^{n-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow c_n = 14\cdot 3^{n-1} - 10\cdot 2^{n-1} = b_{n+1} - b_n \Rightarrow b_n - b_{n-1} = 14\cdot 3^{n-2} - 10\cdot 2^{n-2}$$

$$\Rightarrow b_n - b_1 = \sum_{k=2}^{n}(b_k - b_{k-1}) = \sum_{k=2}^{n}\left(14\cdot 3^{k-2} - 10\cdot 2^{k-2}\right)$$

$$= 14\sum_{k=2}^{n}3^{k-2} - 10\sum_{k=2}^{n}2^{k-2} = 14\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1} - 10\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1}$$

$$= 14\cdot\frac{3^{n-1}-1}{3-1} - 10\cdot\frac{2^{n-1}-1}{2-1} = 7(3^{n-1}-1) - 10(2^{n-1}-1)$$

$$= 7\cdot 3^{n-1} - 10\cdot 2^{n-1} + 3$$

$$\Rightarrow b_n = b_1 + 7\cdot 3^{n-1} - 10\cdot 2^{n-1} + 3 = 7\cdot 3^{n-1} - 10\cdot 2^{n-1} + 3 = a_{n+1} - a_n$$

$$\Rightarrow a_n - a_{n-1} = 7\cdot 3^{n-2} - 10\cdot 2^{n-2} + 3$$

$$\Rightarrow a_n - a_1 = \sum_{k=2}^{n}\left(7\cdot 3^{n-2} - 10\cdot 2^{n-2} + 3\right) = 7\sum_{k=1}^{n-1}3^{k-1} - 10\sum_{k=1}^{n-1}2^{k-1} + 3(n-1)$$

$$= 7\cdot\frac{3^{n-1}-1}{3-1} - 10\cdot\frac{2^{n-1}-1}{2-1} + 3(n-1) = \frac{7}{2}(3^{n-1}-1) - 10(2^{n-1}-1) + 3(n-1)$$

$$= \frac{7}{2}\cdot 3^{n-1} - 10\cdot 2^{n-1} + 3n - \frac{7}{2} + 10 - 3 = \frac{7}{2}\cdot 3^{n-1} - 10\cdot 2^{n-1} + 3n + \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow a_n = a_1 + \frac{7}{2}\cdot 3^{n-1} - 10\cdot 2^{n-1} + 3n + \frac{7}{2} = \frac{7}{2}\cdot 3^{n-1} - 10\cdot 2^{n-1} + 3n + \frac{9}{2}$$

解法2

(1)　$6n$がないものとして三項間漸化式の特性方程式を解きます。

$$a_{n+2}-5a_{n+1}+6a_n=0\Rightarrow \alpha^2-5\alpha+6=(\alpha-2)(\alpha-3)=0$$
$$\Rightarrow \alpha=2,3\Rightarrow\begin{cases}a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)\\ a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)\end{cases}$$

(2)　それぞれの場合の一般項を求めます。まずは上段の漸化式です。次のようにb_nを定義して漸化式から$6n$がなくなるように係数p、qを決めます。するとb_nは等比数列に帰着できます。

$$\begin{cases}b_n=a_{n+1}-2a_n+pn+q\\ b_{n+1}=3b_n\end{cases}$$
$$\Rightarrow a_{n+2}-2a_{n+1}+p(n+1)+q=3(a_{n+1}-2a_n+pn+q)$$
$$\Rightarrow a_{n+2}-2a_{n+1}-3(a_{n+1}-2a_n)=6n=3(pn+q)-p(n+1)-q$$
$$\Rightarrow\begin{cases}6n=3pn-pn=2pn\Rightarrow p=3\\ 3q-p-q=2q-p=2q-3=0\Rightarrow q=\dfrac{3}{2}\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}b_n=a_{n+1}-2a_n+3n+\dfrac{3}{2}\\ b_{n+1}=3b_n\Rightarrow b_n=3b_{n-1}=\cdots=3^{n-1}b_1\end{cases}$$
$$b_1=a_2-2a_1+3\cdot1+\frac{3}{2}=2+\frac{3}{2}=\frac{7}{2}\Rightarrow b_n=\frac{7}{2}\cdot3^{n-1}$$

次にもう1つの場合は、次のようにc_nを定義して漸化式から$6n$がなくなるように係数r、sを決めます。するとc_nも等比数列に帰着できます。

$$\begin{cases}c_n=a_{n+1}-3a_n+rn+s\\ c_{n+1}=2c_n\end{cases}$$
$$\Rightarrow a_{n+2}-3a_{n+1}+r(n+1)+s=2(a_{n+1}-3a_n+rn+s)$$
$$\Rightarrow a_{n+2}-3a_{n+1}-2(a_{n+1}-3a_n)=6n=2(rn+s)-r(n+1)-s$$
$$\Rightarrow\begin{cases}6n=2rn-rn=rn\Rightarrow r=6\\ 2s-r-s=s-r=s-6=0\Rightarrow s=6\end{cases}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}c_n=a_{n+1}-3a_n+6n+6\\ c_{n+1}=2c_n\Rightarrow c_n=2c_{n-1}=\cdots=2^{n-1}c_1\end{cases}$$
$$c_1=a_2-3a_1+6\cdot1+6=11\Rightarrow c_n=11\cdot2^{n-1}$$

(3)　両方とも解けたので、その差からa_nの一般項が得られます。

$$\therefore \begin{cases} b_n = a_{n+1} - 2a_n + 3n + \dfrac{3}{2} = \dfrac{7}{2} \cdot 3^{n-1} \\ c_n = a_{n+1} - 3a_n + 6n + 6 = 11 \cdot 2^{n-1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n - 3n + \frac{3}{2} - 6 = \frac{7}{2} \cdot 3^{n-1} - 11 \cdot 2^{n-1} \Rightarrow a_n = 3n + \frac{9}{2} + \frac{7}{2} \cdot 3^{n-1} - 11 \cdot 2^{n-1}$$